

DEVOIR NUMÉRO 5 VERSION A

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

EXERCICE

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

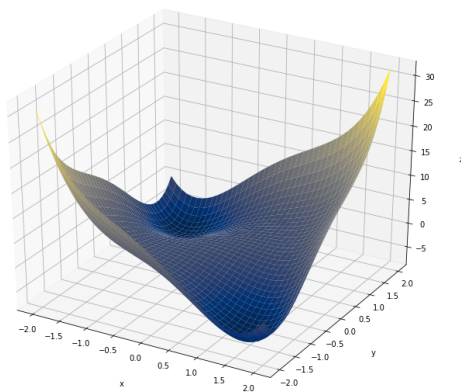
$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2.
 - a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
 - b. Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a :
$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}.$$
 - c. En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
3.
 - a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .
 - b. Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.
 - c. Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.
 - d. Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f .
4.
 - a. Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.
 - b. Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?
5.
 - a. Compléter la deuxième ligne du programme suivant afin de définir la fonction f en Python.

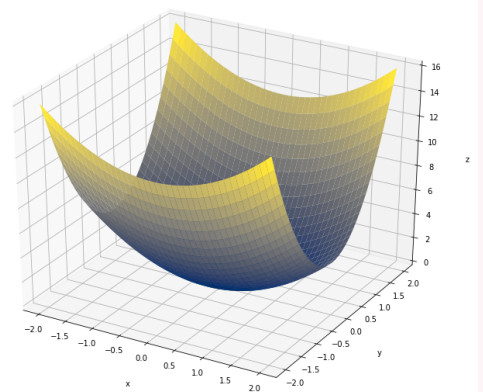
```
1 def f(x, y):  
2     return .....  
3
```

- b. On utilise la fonction précédente pour tracer le graphe de f et Python renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.

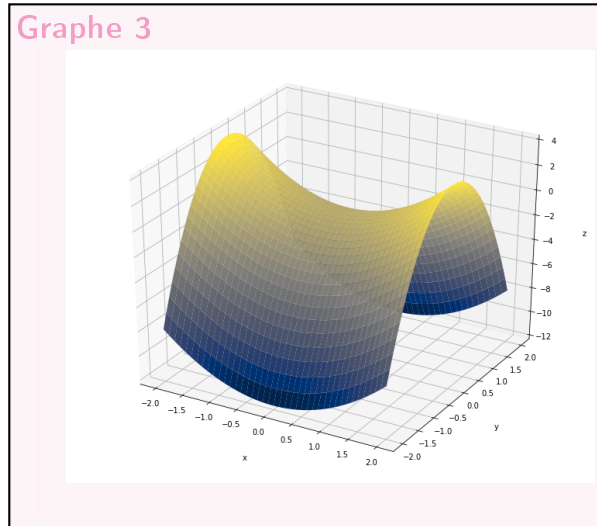
Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3



EXERCICE 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ où σ est strictement positif. On rappelle que la fonction f_X qui à tout réel x associe $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X , définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.
2. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
 - a. Montrer que la fonction de répartition de Y , notée F_Y est définie par

$$F_Y(x) = \begin{cases} 2F_X(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

- b. En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y .
 - c. Montrer que Y possède une espérance et que l'on a $E(Y) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.
3. On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$ composé de variables aléatoires mutuellement indépendantes et ayant toutes la même loi que Y .

On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$.

- a. Montrer que S_n est un estimateur de σ , donner la valeur de son espérance puis proposer un estimateur (noté T_n) de σ , construit de façon affine à partir de S_n et tel que $E(T_n) = \sigma$.
 - b. Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X , puis déterminer $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(S_n)$.
 - c. Déterminer la variance de T_n et en déduire que T_n est un estimateur convergent de σ .
4. On rappelle qu'en Python, la commande `rd.normal(m,s,n)` simule n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi normale de paramètres m et s^2 , et les place dans un tableau à n colonnes. Compléter le script suivant afin qu'il simule les variables S_n et T_n pour des valeurs de n et σ rentrées par l'utilisateur du programme.

```
1 def simul_ST(n, sigma) :
2     X = .....    ## simulation de X_1, ..., X_n
3     Y = .....    ## simulation de Y_1, ..., Y_n
4     S = .....
5     T = .....
```

EXERCICE 3

Une entreprise souhaite acquérir une machine qui fabrique un certain type d'objets et qui, en fonctionnement normal, produit une proportion p ($0 < p < 1$) d'objets défectueux. Le directeur veut connaître la valeur de p . Pour cela, il teste la machine en prélevant un échantillon de n objets qu'il analyse ($n \geq 1$). Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ième objet fabriqué est défectueux} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose que, dans les conditions de prélèvement, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1.
 - a. Justifier rapidement que $F_n = \frac{S_n}{n}$ est un estimateur de p .
 - b. Montrer que $\mathbb{E}(F_n) = p$.
 - c. Calculer la variance de F_n .
 - d. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que l'estimateur F_n est convergent.
On demande de redémontrer la propriété du cours, il est interdit de l'utiliser sans explications.
2. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On souhaite déterminer dans cette question un intervalle de confiance pour le paramètre inconnu p , au niveau de confiance $1 - \alpha$, à partir de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$.
 - a. Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $\left(\sqrt{n} \frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
 - b. Montrer que, pour tout $p \in [0, 1]$, on a $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ à l'aide d'une étude de fonction bien choisie.
 - c. Soit f_n la réalisation de F_n sur l'échantillon considéré. Soit t_α le réel défini par $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Montrer qu'un intervalle de confiance (asymptotique) de p au niveau $1 - \alpha$ est donné par $[u_n, v_n]$ où

$$u_n = f_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = f_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}.$$

3. Le directeur a calculé que son entreprise peut se permettre de produire une proportion $p = 0,05$ d'objets défectueux. Il analyse 10 000 objets produits et en compte 400 qui sont défectueux. Il fixe un seuil de confiance de 95%. Décide-t-il d'acheter la machine ?

EXERCICE 4

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, \theta]$ où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de la variable aléatoire X . On considère les estimateurs suivants :

$$U_n = \max(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad T_n = n \left(1 - \frac{U_n}{\theta} \right).$$

On souhaite déterminer un intervalle de confiance asymptotique du paramètre θ de la forme $[U_n, V_n]$, au niveau de confiance $1 - \alpha$.

1. T_n peut-il être un estimateur de θ ?
2. Déterminer la fonction de répartition F_{U_n} de la variable aléatoire U_n . En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire T_n .
3. Prouver que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T suivant la loi $\mathcal{E}(1)$.
4. Montrer l'égalité des événements $[U_n \leq \theta \leq V_n]$ et $\left[0 \leq T_n \leq n \left(1 - \frac{U_n}{V_n} \right) \right]$.
5. En déduire que l'intervalle cherché est obtenu pour

$$V_n = \frac{U_n}{1 + \frac{1}{n} \ln(\alpha)}.$$

6. On considère le programme suivant :

```
1 n = input('Valeur de n ?')
2 theta = 5*rd.rand()
3 for i in range(1,n+1):
4     disp(theta*rd.rand())
```

Une réalisation de ce programme affiche les nombres suivants :

```
1 >>>
2      0.8608569      0.1431483      0.9508818      0.8822904      0.1341774
3      1.0237293      0.9650951      0.2335499      0.6681662      0.3256168
```

- Si X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, quelle est la loi de la variable aléatoire θX ?
- On considère un niveau de confiance de 0,95 et on donne $\ln(0,05) \approx -3$. Quel est l'intervalle de confiance pour θ fourni par les réalisations de U_n et V_n précédentes.
- Le paramètre α étant fixé à 0,95, quelle valeur faut-il donner à n pour que $V_n = 1,01U_n$?